МНОЖЕСТВА:

Теорема Вейерштрасса (о существовании верхней (нижней грани))

Стыкуем множество X и Y

Принцип Архимеда

По b-1<n0<b (прибавляем 1)

Теорема Коши-Кантора (принцип вложенных отрезков)

По аксиоме о непрерывности R

Теорема Бореля-Лебега (о конечном покрытии отрезка)

Деление отрезка на 2

Задание интервала [a;b]

Задание E = min{c-a;b-c}

Находим |In|<E

Теорема Больцано-Вейерштрасса (о предельной точке)

Рассматриваем какую-то окрестность каждой точки I>X

Выделяем из этих окрестностей конечное покрытие

X – конечное множество – противоречие.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ:

Теорема о единственности предела

От противного – задаем 2 окрестности точек a и b

Теорема об ограниченности последовательности, имеющей предел

Берем E = 1

Берем d = max(1, |a-x1|, |a-x2|, …)

|xn – a| <= d

Переходы к пределу в неравенствах:

1) Если последовательность стационарна и равна a, то ее предел равен a.

Берем ne = 1, расписываем по определению

2) Теорема о двух копах.

Фиксируем окрестность

Берем n0 = max(n1, n2)

3) Если limxn<limyn, то с какого-то номера n будет верно xn<yn.

Задаем 2 непересекающиеся окрестности точек A и B

Лемма о пределе подпоследовательности.

Расписываем предел последовательности по определению

Для ne существует ke и дальше определение

Теорема Вейерштрасса (о существовании предела ограниченной последовательности)

Берем окрестность точки супремума, расписываем по определению верхней грани

Рассматриваем левую окрестность точки supxn

Число e – гроб

Теорема Больцано-Вейерштрасса (о существовании предела неограниченной последовательности определенного знака)

Рассматриваем отрезок, на котором ограничена xn, делим его на 2 и получаем хотя бы один отрезок, который содержит бесконечное количество членов подпоследовательности, продолжаем этот процесс и получаем, что концы получаемых отрезков сходятся к числу E, которое получаем из теоремы Кантора. Следовательно, в окрестности точки E содержится вся подпоследовательность, следовательно она является пределом последовательности по т о 2-х копах.

Для бесконечной – выделяем xnk>k, и так получаем бесконечно большую последовательность.

Критерий Коши

Необходимость: рассматриваем для n и m предел по определению для e/2, затем расписываем разность как сумму и разбиваем модуль.

Достаточность: xn имеет предел => из нее можно выделить подпоследовательность xnk с таким же пределом, распишем ее для e/2

Распишем критерий Коши для самой последовательности

Расписываем определение предела для самой последовательности для любого n>max(nke,ne)

БМП и ББП: Все свойства доказываются через рассмотрение того, что модуль чего-то меньше или больше чего-то, связанного с эпсилоном.

ЛК БМП есть БМП

Задаем c > |lambda| + |mu|

Расписываем определение предела для ЛК через e/c у каждого слагаемого

Произведение БМП на огр есть БМП

Зададим b – верхнюю грань xn

Распишем предел an, для e/b

Сумма ББП одного знака есть ББП того же знака – БЕЗ ДОКАТЕЛЬСТВА

Произведение ББП на ограниченную – ББП

Расписываем определение предела для xn для e=2e/|A|, а для yn для e=|A|/2

Произведение ББП есть ББП – БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Произведение ББП на огр есть ББП – БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Связь БМП и ББП – НЕТУ В ТЕТРАДКЕ

Расписываем определение для xn, переворачиваем дроби

Арифметические свойства пределов

Предел суммы равен сумме пределов

Доказываем, что любую последовательность можно представить в виде xn=A+an, где an – БМП

Расписываем сумму пределов

Предел произведения равен произведению пределов – аналогично

Предел частного равен частному пределов – аналогично.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ:

Эквивалентность по Коши и Гейне

Рассмотрим произвольную xn, сходящуюся к a. Тогда для любой окрестности точки A найдется окрестность точки a, f(xn) которой принадлежит окрестности точки A. Следовательно, A = lim(f(x)), x -> a.

Обратно: пусть xn ->a, f(xn)->A, но lim(f(x)) != A. Тогда существует окрестность точки А такая, что для любой соответствующей ей окрестности точки a найдется последовательность, для которой верно |f(x) – A| >= E. Положим E=1/n, Тогда находим для такой окрестности xn и получаем, что она сходится к a, и получаем противоречие…

Теорема о единственности предела

От противного – задаем 2 непересекающиеся окрестности точек A и B.

Существуют 2 окрестности точки a. Тогда f от окрестностей точек a лежат в окрестностях точек A и B, которые не пересекаются, но окрестности точек a пересекаются => противоречие.

Об ограниченности функции, имеющей предел

Как и в последовательностях, но задаем E=1 для f(x) в некоторой проколотой окрестности a

Об арифметических операциях над пределами

Пишем, что по эквивалентности определений Коши и Гейне, перейдем к последовательности значений xn для любого xn, сходящегося к a.

По той же эквивалентности переходим к функциям.

Предельный переход в неравенствах:

Если A<B, то f(x) < g(x)

Расписываем окрестности A и B через эпсилон, связанный с r: A<r<B

Теорема о двух копах

Как и с последовательностью, расписываем, сравниваем

Теорема о пределе сложной функции

Рассматриваем окрестности a на множестве X, b на множестве F, B на множестве g(F). Функция определена – четко.

Теорема о значении двухстороннего предела

Множества X левее а и правее а – подмножества X, предел которого равен A => они так же равны A. – Сам не верю доказательству

Критерий Коши

Задаем окрестность по множеству X и расписываем критерий, разбивая модуль

I замечательный предел

Радиус, угол, площади

Теорема о двух копах

II замечательный предел

Гроб

Теорема о существовании предела монотонной функции

Существует x`, в котором |f(x`)-A| < E. В силу монотонности для любого x > x` выполняется то же самое, значит предел существует.

БМФ И ББФ:

Лемма о переходе от ББФ к БМФ

Аналогично с последовательностью

Произведение БМФ на ОГР

Рассматриваем последовательность на E, и так же доказываем как с последовательностями.

Сравнение функций:

Лемма о главной части функции

Рассматриваем f(x)=fi(x)\*g(x) и переписываем ее в вид f(x) = g(x) +a(x)(g(x)), где a(x) – БМФ.

Непрерывность:

Теорема об арифметических свойствах непрерывных функций – Без доказательств

Теорема о непрерывности сложной функции

Рисуем оси, рассматриваем окрестности. Тк для каждой окрестности существует окрестность, то функция непрерывна.

Теорема о существовании непрерывной обратной функции

Рассматриваем 2 точки x1 и x2 для возрастающей f, доказываем ее взаимнооднозначность.

Теорема Больцано-Коши

Делим отрезок пополам, беря на каждом шагу отрезок, на концах которого значения по разные стороны от C, затем по непрерывности и предел значения концов получаем f(c)=C

Теорема Вейерштрасса

Чето сложно

Теорема о непрерывности обратной функции

Берем E>0: f(a)<f(x0-E)<f(x0)<f(x0+E)<f(b)

Берем d>0: y1<y0-d<y0+d<y2

Расписываем определение и получаем   
|f^-1(Ud(y0))-f^-1(y0)| <E

Равномерная непрерывность:

Теорема Кантора-Гейне

Тяжело уже идет

Непрерывность основных элементарных функций

Лемма о пределе показательной подпоследовательности – через задание xn=a^(1/n)-1

Лемма о пределе показательной функции – через задание двух подпоследовательностей разного знака.

Для показательной – домножаем на a^x0

Для логарифмической – обратная от a^x0

Для синуса – расписываем модуль разности синусов

Для арксинуса – обратная к синусу

Для косинуса – аналог синуса, без док-ва

Для арккосинуса – обратная к косинусу

Для степенной – приводим к e^lnx^a, непрерывность как сложной функции

Теорема о модуле непрерывности – вроде даже не надо

ПРОИЗВОДНАЯ:

Теорема о необходимом и достаточном условии дифференцируемости

Расписываем условие дифференцируемости и подставляем в определение производной

Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности

Расписываем условие дифференцируемости и непрерывности, преобразовываем непрерывность так, чтобы вылезла дифференцируемость

Правила дифференцирования (только для f/g)

Расписываем предел приращений функций к приращению аргумента

Теорема о производной сложной функции

Определяем композицию

Расписываем приращение функции к приращению аргумента

Теорема о производной обратной функции

Расписываем dx/dy при dy -> 0

Геометрический смысл производной и дифференциала

Теория, уравнение секущей и касательной

Производные основных элементарных функций

По определению только C, sin, cos, показательная, остальные как обратные либо сведение к вышеуказанным

Теорема Лейбница

Доказательство гроб

Определение дифференциала высшего порядка – НЕ БЫЛО НА ЛЕКЦИИ

Дифференцирование параметрически заданной функции

Лемма о возрастании функции

Расписываем определение для e=f `(x0)/2

Теорема Ферма

От противного, добиваем леммой

Теорема Ролля

Либо функция стационарна, либо монотонна на каких-то участках, но f(a)=f(b) => есть точки экстремума => по т. Ферма

Теорема Лагранжа

Создаем функцию F(x)=f(x) – f(a) – (f(b)-f(a))/(b-a) \* (x-a), сводим задачу к т. Ролля

Теорема Коши

Создаем функцию F(x)=f(x) – f(a) – g ` (x) \*(f(b)-f(a)) / (g(b)-g(a)) \* (g(x) – g(a)), сводим задачу к т. Ролля.

Правило Лопиталя 1

Задаем последовательность xn в одной из частей окрестности точки a, доопределяем f(a)=g(a)=0 (КАК?)

Выполняется т Коши

Правило Лопиталя 2

Полугроб. Я устал.